第27卷 第1期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 1
2010年02月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0111-07

# 插值正交向量尺度函数

吴国昌[1]， 刘占卫[2]， 程正兴[3]

(1- 河南财经学院信息学院，郑州 450002； 2- 郑州大学信息工程学院，郑州 450052；
3- 西安交通大学理学院，西安 710049)

**摘 要**: 插值正交尺度函数在抽样理论、信号处理和计算机图形学等方面有重要应用，本文给出了紧支撑正交插值向量尺度函数的定义，并对它们进行了刻画。我们证明了向量小波子空间的抽样定理问题能被转化为每个分量所在的闭空间的抽样定理问题。进一步，我们得到了向量小波子空间中抽样定理的具体表达形式。最后，我们构造了两个例子。

**关键词**: 向量小波子空间；抽样定理；向量尺度函数

**分类号**: **AMS**(2000) 42C15; 42C40 **中图分类号**: O174.2 **文献标识码**: A

## 1 引言

小波分析是近二十年来迅速发展起来的一门新的学科，是继傅立叶分析之后的一个突破性进展，它为许多相关领域提供了强有力的工具。近年来，多小波[1]理论成为小波分析的研究热点。由于多小波能同时具有正交性、对称性等优良特性，因此，它们已成为处理信号数据[2]的常用工具之一。而且，它也被应用在图像压缩[3]，求解积分方程与微分方程[4]等方面。向量小波是一类广义多小波。Xia 和 Suter[5]引入了向量小波的概念。文献 [6] 运用向量双正交小波变换研究海洋涡流流动现象。然而，向量小波与多小波[7]是有区别的：譬如，向量小波可以表示向量信号，而多小波表示标量信号；它们的另一个区别是实施离散的多小波变换之前需要预滤波，而实施离散的向量小波变换则不必要进行预滤波。电视图像，数字电影就是多重向量信号的例子，所以，在多小波理论与信号表示中，研究向量小波是有意义的。

抽样定理在数字信号处理和图象处理中具有重要的作用。最为著名的抽样定理是古典 Shannon 抽样定理[8]。但是，由于古典抽样定理周知的局限性，人们继而得到了许多形式的推广。小波分析出现以后，Walter 把抽样定理推广到多尺度分析的小波子空间中[9]。最近，人们把它推广到多小波子空间里，得到了许多有用的结果。

根据上面我们知道，向量小波和多小波是不同的。尽管，关于多小波中抽样定理，已经有不少文献，但是，目前为止，还很少有人研究向量小波子空间中的抽样定理。在本文中，我们主要考虑这个问题。我们给出了紧支撑正交插值向量尺度函数的刻画和构造，从而得到了向量小波子空间中的抽样定理。

## 2 背景知识

设常数 $s \in \mathbb{Z}$，而且 $s \geq 2$，用 $\mathbb{C}^s$ 表示复数域上定义了内积的 $s$ 维线性空间。定义向量函数

**收稿日期**: 2008-06-03. **作者简介**: 吴国昌 (1970年2月生)，男，博士，讲师. 研究方向：小波分析与抽样理论.

空间 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 为

$$L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s) := \big\{F(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x))^T : f_\iota(x) \in L^2(\mathbb{R}),\ \iota = 1,2,\cdots,s\big\},$$

这里及本文其它地方，$^T$ 表示向量或矩阵的转置。对于 $F \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$，$\|F\|_2$ 表示 $F$ 的2-范数，即

$$\|F\|_2 := \Big(\sum_{\iota=1}^{s}\int_{\mathbb{R}} |f_\iota(x)|^2 \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 $F(x)$ 的积分为

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\mathrm{d}x := \Big(\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} f_2(x)\mathrm{d}x, \cdots, \int_{\mathbb{R}} f_s(x)\mathrm{d}x\Big)^T.$$

对于每一个定值 $x \in \mathbb{R}$，$\|F(x)\|$ 表示通常的向量范数。定义向量函数 $F(x)$ 的Fourier变换为

$$\widehat{F}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} F(x)\mathrm{e}^{-ix\omega}\mathrm{d}x,$$

其中 $i$ 为虚数单位。对于

$$F(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)\big)^T, \quad G(x) = \big(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_s(x)\big)^T \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s).$$

定义 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的符号内积为下面的矩阵

$$\langle F, G\rangle := \int_{\mathbb{R}} F(x)G(x)^* \mathrm{d}x, \tag{1}$$

这里，$G(x)^*$ 表示 $G(x)$ 的共轭转置。

下面我们约定：$\mathbf{E}_{s\times s}$ 表示对角线上的元素为1，而其它元素为0的 $s$ 行 $s$ 列单位矩阵；$\mathbf{1}_{s\times s}$ 则表示所有元素都是1的矩阵。

多尺度分析方法是构造小波的重要方法之一。本节引进向量函数空间 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 的向量多尺度分析概念。

**定义2.1** 称空间 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 的一个闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 的一个向量多尺度分析(记作VMRA)，如果 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足下列条件。

(a) $V_j \subset V_{j+1}$，对任意的 $j \in \mathbb{Z}$；

(b) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{\underline{0}\}$；$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ 在 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 中稠密，这里 $\underline{0}$ 表示 $s$ 维零向量；

(c) $F(x) \in V_j \Longleftrightarrow F(\alpha x) \in V_{j+1}$，对任意的 $j \in \mathbb{Z}$，$\alpha \geq 2$ 且 $\alpha \in \mathbb{Z}$；

(d) 存在向量函数 $\Phi(x) \in V_0$，使得 $\{\Phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成子空间 $V_0$ 的标准正交基。称 $\Phi(x)$ 为这个向量多尺度分析的向量尺度函数。

假设 $\Phi(x)$ 为紧支撑的向量尺度函数，依定义2.1，$\Phi(x) \in V_0 \subset V_1$。根据定义2.1，存在一个有限支撑的常数矩阵序列 $\{P_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})^{s\times s}$，使得

$$\Phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k \Phi(\alpha x - k). \tag{2}$$

在式(2)的两边实施Fourier变换，并且假定 $\widehat{\Phi}(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 连续，我们得到

$$\widehat{\Phi}(\omega) = \mathcal{P}(\omega/\alpha)\widehat{\Phi}(\omega/\alpha), \quad \omega \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

其中

$$\mathcal{P}(\omega)=\frac{1}{\alpha}\sum_{k\in\mathbb{Z}}P_k\cdot \mathrm{e}^{-ik\omega}. \tag{4}$$

称 $\mathcal{P}(\omega)$ 为滤波器 $\{P_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的符号函数，也称之为对应于 $\Phi(x)$ 的符号函数。不失一般性，令 $\hat{\Phi}(0)=(1,1,\cdots,1)^T$ 以及 $\mathcal{P}(0)=\mathbf{E}_{s\times s}$。令 $W_j\,(j\in\mathbb{Z})$ 是 $V_j$ 在 $V_{j+1}$ 中的正交补空间，并且存在紧支撑的向量函数 $\Psi_i(x)\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$, $i=1,2,\cdots,\alpha-1$，使得 $\Psi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,\alpha-1)$ 的整数平移构成子空间 $W_0$ 的 Riesz 基，则 $W_j\,(j\in\mathbb{Z})$ 为向量函数族 $\{\Psi_i(\alpha^j x-k),\ i=1,2,\cdots,\alpha-1,\ k\in\mathbb{Z}\}$ 的“线性”张成空间在 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 中的闭包。由于 $\Psi_i(x)\in W_0\subset V_1$，存在有限支撑的 $s\times s$ 常数矩阵序列 $\{Q_{i,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})^{s\times s}$，使得

$$\Psi_i(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_{i,k}\Phi(\alpha x-k). \tag{5}$$

**定义 2.2**　称向量函数 $\Psi_i(x)\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$, $i=1,2,\cdots,\alpha-1$ 是对应于向量正交尺度函数 $\Phi(x)$ 的向量正交小波函数，若 $\Psi_i(x)\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$, $i=1,2,\cdots,\alpha-1$ 是子空间 $W_0$ 的标准正交基，并且 $\Psi_i(x)$ 与 $\Phi(x)$ 满足

$$\langle\,\Phi(\cdot),\ \Psi_i(\cdot-k)\,\rangle=\mathbf{O},\quad k\in\mathbb{Z}; \tag{6}$$

$$\langle\,\Psi_i(\cdot),\ \Psi_j(\cdot-k)\,\rangle=\delta_{i,\,j}\delta_{0,\,k}\mathbf{E}_{s\times s},\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{7}$$

这里 $\mathbf{O}$ 表示 $s\times s$ 阶零矩阵。

## 3　$\alpha$ 带紧支撑正交插值向量尺度函数和向量小波

在这部分，我们主要考虑紧支撑正交插值向量尺度函数的刻画。

假设闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 的一个向量多尺度分析，$\Phi(x)$ 为它的子空间 $V_0$ 的向量尺度函数。对于所有 $F(x)=(f_1(x),\,f_2(x),\cdots,f_s(x))^T\in V_0$，我们能否用它的抽样 $F(n)=(f_1(n),\,f_2(n),\cdots,f_s(n))^T$ 来重构它呢？我们将要证明：在一定条件下，结论是肯定的。

设 $\Phi(x)=(\phi_1(x),\,\phi_2(x),\cdots,\phi_s(x))^T$ 是紧支撑正交向量尺度函数，我们定义

$$V_0^{(i)}=\mathbf{clos}_{L^2(\mathbb{R})}\big(\mathrm{span}\{\phi_i(x-k),\ k\in\mathbb{Z}\}\big),\quad i=1,2,\cdots,s.$$

由于 $\{\Phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成子空间 $V_0$ 的标准正交基，所以有

$$\langle\,\Phi(\cdot-k),\ \Phi(\cdot-\nu)\,\rangle=\delta_{k,\,\nu}\,\mathbf{E}_{s\times s},\quad k,\,\nu\in\mathbb{Z}.$$

按照向量函数的内积的定义把上边等式展开，我们就得到

$$\begin{pmatrix}\langle\phi_1(\cdot-k),\phi_1(\cdot-\nu)\rangle & \langle\phi_1(\cdot-k),\phi_2(\cdot-\nu)\rangle & \cdots & \langle\phi_1(\cdot-k),\phi_s(\cdot-\nu)\rangle\\ \langle\phi_2(\cdot-k),\phi_1(\cdot-\nu)\rangle & \langle\phi_2(\cdot-k),\phi_2(\cdot-\nu)\rangle & \cdots & \langle\phi_2(\cdot-k),\phi_s(\cdot-\nu)\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle\phi_s(\cdot-k),\phi_1(\cdot-\nu)\rangle & \langle\phi_s(\cdot-k),\phi_2(\cdot-\nu)\rangle & \cdots & \langle\phi_s(\cdot-k),\phi_s(\cdot-\nu)\rangle\end{pmatrix}=\delta_{k,\nu}\mathbf{E}_{s\times s},$$

根据矩阵相等的定义，我们就得到

$$\langle \phi_m(\cdot-k),\, \phi_n(\cdot-\nu) \rangle = \delta_{m,n}\,\delta_{k,\nu}, \quad m,n=1,2,\cdots,s, \quad k,\nu\in\mathbb{Z}.$$

所以，我们就得到：系统 $\{\phi_i(x-k), k\in\mathbb{Z}\}$ 构成一个空间 $V_0^{(i)}$ 的一个标准正交系统，这里 $i=1,2,\cdots,s$。而且，我们同时得到：$V_0^{(i)}\perp V_0^{(j)}$, $i\neq j$。

下面我们考虑它的完备性。

对于所有 $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))^T\in V_0$，由于 $\{\Phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成子空间 $V_0$ 的标准正交基，所以我们有

$$F(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle F(\cdot),\, \Phi(\cdot-k)\rangle \Phi(x-k).$$

利用内积的定义，我们有

$$\langle F(\cdot),\, \Phi(\cdot-k)\rangle = \begin{pmatrix} \langle f_1(\cdot),\, \phi_1(\cdot-k)\rangle & \langle f_1(\cdot),\, \phi_2(\cdot-k)\rangle & \cdots & \langle f_1(\cdot),\, \phi_s(\cdot-k)\rangle \\ \langle f_2(\cdot),\, \phi_1(\cdot-k)\rangle & \langle f_2(\cdot),\, \phi_2(\cdot-k)\rangle & \cdots & \langle f_2(\cdot),\, \phi_s(\cdot-k)\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle f_s(\cdot),\, \phi_1(\cdot-k)\rangle & \langle f_s(\cdot),\, \phi_2(\cdot-k)\rangle & \cdots & \langle f_s(\cdot),\, \phi_s(\cdot-k)\rangle \end{pmatrix}, \quad (8)$$

比较等式的两边，我们就得到

$$f_j(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{s}\langle f_j(\cdot),\phi_i(\cdot-k)\rangle\phi_i(x-k), \quad j=1,2,\cdots,s.$$

又因为 $V_0^{(i)}\perp V_0^{(j)}$, $i\neq j$，所以我们有

$$f_i(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f_i(\cdot),\, \phi_i(\cdot-k)\rangle\phi_i(x-k), \quad i=1,2,\cdots,s.$$

实际上，我们已经证明了这部分的一个主要结果。

**定理 3.1** 假设闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 的一个向量多尺度分析，向量

$$\Phi(x)=\big(\phi_1(x),\, \phi_2(x),\cdots,\, \phi_s(x)\big)^T$$

为它的子空间 $V_0$ 的向量尺度函数。我们定义

$$V_0^{(i)}=\mathbf{clos}_{L^2(\mathbb{R})}\big(\mathrm{span}\{\phi_i(x-k),\ k\in\mathbb{Z}\}\big), \quad i=1,2,\cdots,s,$$

那么，我们有 $V_0=V_0^{(1)}\times V_0^{(2)}\times\cdots\times V_0^{(s)}$。而且，$V_0^{(i)}\perp V_0^{(j)}$, $i\neq j$。

因此，向量小波子空间的抽样定理问题就转化为每个分量所在的闭空间 $V_0^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 的抽样定理问题。如果在每个闭子空间 $V_0^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 的任意函数 $f_i(x)$，我们有

$$f_i(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_i(k)\phi_i(x-k), \quad i=1,2,\cdots,s,$$

那么，对于所有 $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))^T\in V_0$，我们就可以用它的抽样

$$F(n)=\big(f_1(n),\, f_2(n),\cdots,\, f_s(n)\big)^T$$

来重构它。

下面我们考虑向量小波子空间中抽样定理的具体形式。

假设 $\Phi(x)=\big(\phi_1(x),\,\phi_2(x),\cdots,\,\phi_s(x)\big)^T$ 是紧支撑正交向量尺度函数，如果它连续而且满足

$$\Phi(k)=\big(\phi_1(k),\,\phi_2(k),\cdots,\,\phi_s(k)\big)^T=\delta_{0,\,k}\,\mathbf{1}_{s\times 1},\tag{9}$$

那么，我们说它具有插值性质，并称它是紧支撑正交插值向量尺度函数。

如果 $\Phi(x)=(\phi_1(x),\,\phi_2(x),\cdots,\,\phi_s(x))^T$ 是紧支撑正交插值向量尺度函数，对于所有 $F(x)=(f_1(x),\,f_2(x),\cdots,\,f_s(x))^T\in V_0$，所以我们有

$$F(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}A_k\Phi(x-k),$$

这里 $(A_k)=\langle F(\cdot),\Phi(\cdot-k)\rangle$。

公式 (9) 说明每个函数 $\phi_i(x)\,(i=1,2,\cdots,s)$ 具有插值性质，因此我们 $\langle f_i(\cdot),\phi_j(\cdot-k)\rangle=f_i(k),\ i,j=1,2,\cdots,s$。再根据 (8) 式，我们容易得到

$$A_k=\begin{pmatrix} f_1(k) & f_1(k) & \cdots & f_1(k)\\ f_2(k) & f_2(k) & \cdots & f_2(k)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_s(k) & f_s(k) & \cdots & f_s(k)\end{pmatrix}.$$

所以，如果 $\Phi(x)=(\phi_1(x),\,\phi_2(x),\cdots,\,\phi_s(x))^T$ 是紧支撑正交插值向量尺度函数，我们得到了向量小波子空间的抽样定理的表达式。

对于所有 $F(x)=(f_1(x),\,f_2(x),\cdots,\,f_s(x))^T\in V_0$，我们有

$$\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ \cdots\\ f_s(x)\end{pmatrix}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\begin{pmatrix} f_1(k) & f_1(k) & \cdots & f_1(k)\\ f_2(k) & f_2(k) & \cdots & f_2(k)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_s(k) & f_s(k) & \cdots & f_s(k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1(x-k)\\ \phi_2(x-k)\\ \cdots\\ \phi_s(x-k)\end{pmatrix}.\tag{10}$$

反过来，如果等式 (10) 成立，我们把它展开就得到每个分量的表达式

$$f_i(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}f_i(k)\,\phi_j(x-k),\quad i=1,2,\cdots,s.$$

又因为 $V_0^{(i)}\perp V_0^{(j)},\ i\neq j$，所以我们有

$$f_i(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\,f_i(\cdot),\,\phi_i(\cdot-k)\,\rangle\phi_i(x-k),\quad i=1,2,\cdots,s.$$

这就是说，每个函数$\phi_i(x)$是插值的,即紧支撑正交向量尺度函数 $\Phi(x)=(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_s(x))^T$ 具有插值性质。这与单小波子空间里抽样定理是相似的。

因此，我们已经证明了这部分另外的一个主要结果。

**定理3.2** 假设闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^s)$ 的一个向量多尺度分析，向量

$$\Phi(x)=\big(\phi_1(x),\,\phi_2(x),\cdots,\,\phi_s(x)\big)^T$$

为它的子空间 $V_0$ 的向量尺度函数。则向量函数 $\Phi(x)$ 具有插值性质当且仅当 (10) 式成立。

## 4 一些例子

下面，我们将给出两个紧支撑正交插值向量尺度函数的例子。

**例4.1** 定义 $\phi_1(t)=\phi_2(t)=\chi_{[0,1]}(t)$，然后再定义 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x)]^T$。我们容易验证

$$\Phi(k)=\big(\phi_1(k),\,\phi_2(k)\big)^T=\delta_{0,k}\,\mathbf{1}_{2\times1},$$

这样，我们就得到空间 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ 中一个紧支撑正交插值向量尺度函数 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x)]^T$。根据定理3.2，我们就得到具有等式 (10) 形式的抽样定理。

**例4.2** 假设 $h$ 是一个满足如下性质的函数

1) $h(x)\in L^1(\mathbb{R})$； 2) $h(x)\geq 0$； 3) $\int_{\mathbb{R}}h(x)\mathrm{d}x=1$；

4) $h(x)$ 是偶的； 5) $\mathrm{supp}h\subset[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$.

令

$$\hat{\phi}_1(\omega)=\int_{\omega-\pi}^{\omega+\pi}h(x)\mathrm{d}x.$$

根据文献 [10]，则 $\hat{\phi}_1(\omega)$ 是一个非负的，连续的偶函数，而且它的支集在区间 $[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ 上，并且在区间 $[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 上，$\hat{\phi}_1(\omega)=1$。因此 $\phi_1(x)$ 是一个偶的带限的紧支撑正交插值尺度函数。

我们首先定义

$$h_0=1,\quad h_1=\frac{1}{3},\quad h_{1-2k}=\frac{8}{9}\Big(-\frac{1}{9}\Big)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots.$$

再定义

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_k h_k\mathrm{e}^{ik\omega}\quad \text{和}\quad \hat{\phi}_2(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}H\Big(\frac{\omega}{2^k}\Big),$$

那么，根据文献 [11]，$\phi_2(x)$ 是一个连续的紧支撑正交插值尺度函数，相应的序列 $h_k$ 具有4阶逼近阶性质。

再定义 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x)]^T$。因为函数 $\Phi(x)$ 的每个分量是紧支撑正交插值尺度函数，根据定理3.2可知，函数 $\Phi(x)$ 也是一个紧支撑正交插值向量尺度函数，而且它具有一些好的数学性质。

致谢：我们衷心感谢审稿人提出的宝贵意见以及对本文的提高。

## 参考文献：

[1] Plonka G, Strela V. Construction of multi-scaling functions with approximation and symmetry[J]. SIAM J Math Anal, 1998, 29: 482-510

[2] Ji H, Riemenschneider S, Shen Z. Multivariate compactly supported fundamental refinables, duals and biorthogonal wavelets[J]. Studies in Appl Math, 1999, 102: 173-204

[3] Wilson RG, Meyer F, Coifman R. Adaptive wavelet packet basis selection for zerotree image coding[J]. IEEE Trans Image Processing, 2003, 12(12): 1460-1472

[4] Han B. Analysis and construction of optimal multivariate biorthogonal wavelets with compact support[J]. SIAM Math Anal, 1999, 30(2): 274-304

[5] Xia X, Suter B. Vector-valued wavelets and vector filter banks[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44(3): 508-518

[6] Fowler J, Li H. Wavelet transforms for vector fields using omnidirectionally balanced multiwavelets[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2002, 50(12): 3018-3027

[7] He W, Lai M. Examples of bivariate nonseparable compactly supported continuous wavelets[J]. IEEE Trans Image Processing, 2000, 9(5): 949-953

[8] Shannon C. Communication in the prensence of noise[J]. Proc IRE, 1949, 37: 10-21

[9] Walter G. A sampling theorem for wavelet subspaces[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1992, 38: 881-884

[10] Zayed A. Shannon-type wavelets and the convergence of their associated wavelet series[C]// Modern Sampling Theory, Chapter 6, John J Benedetto and Paulo J S G Ferreira, Eds., 135-152, Brikhäuser, Boston, 2001

[11] Wu G, *et al.* The cardinal orthogonal scaling function and sampling theorem in the wavelet subspaces[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 194(1): 199-214


# Cardinal Orthogonal Vector Scaling Functions


WU Guo-chang[1], LIU Zhan-wei[2], CHENG Zheng-xing[3]

(1- College of Information, Henan University of Finance and Economics, Zhengzhou 450002;
2- Information Engineering College, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052;
3- Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)



**Abstract:** The cardinal orthogonal scaling functions are useful in several applications such as sampling theory, signal processing, computer graphics. We give the definition of cardinal orthogonal vector scaling functions and classify them. We prove that the issue of sampling theorem in the vector wavelet subspace can be turned into the sampling problem in the that component subspaces. Furthermore, we obtain the explicit expression of sampling theorem in the vector wavelet subspace. At last, we give two examples.



**Keywords:** vector wavelet subspace; sampling theorem; vector scaling functions

**Received:** 03 June 2008. **Accepted:** 22 Apr 2009.